ELEMENTS DE TRAITEMENT DU SIGNAL / SIGNAUX PERIODIQUES/ INPHB/ MP/ 2016-2017

Exercice 1 : Questions préliminaires

1. Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique f(t) se trouve quelquefois limité à un petit nombre de termes ; ce développement peut alors, parfois, s'obtenir à l'aide de formules trigonométriques simples. Déterminer ainsi le développement de Fourier de la fonction périodique suivante : $f(t) = cos(\omega t)cos(\omega t + \phi)$. En préciser la pulsation fondamentale et ses harmoniques éventuels. Quel lien existe-t-il entre la composante continue d'un tel développement et la valeur moyenne de f(t) pendant une période ?

2. On considère la somme *f(t)* de deux sinusoïdes de même pulsation ω, présentant entre elles un déphasage ϕ :
$f(t) = Acos(\omega t) + Bcos(\omega t + \phi)$. Exprimer la moyenne $< f^2(t) >$ du carré de cette somme.

3. On considère maintenant deux sinusoïdes de pulsations différentes ω et Ω.

(a) Exprimer la moyenne du produit $P(t) = cos(\omega t)cos(\Omega t + \phi)$

(b) En déduire la moyenne $< S^2(t) >$ du carré de la somme $S(t) = Acos(\omega t) + Bcos(\Omega t + \phi)$

Exercice 2:

1) Qualifier les deux filtres suivants (filtre1 : circuit RC ; filtre 2 : circuit LCR) et calculer leur gain, leur déphasage et leur(s) pulsation(s) de coupure. A.N : R=500Ω ; L=10mH ; C=10nF.

2) On applique en entrée la tension rectangulaire u(t), périodique de période T, définie par : $\begin{cases} t \in]0, \alpha T[: u(t) = E \\ t \in]\alpha T, T[: u(t) = 0 \end{cases}$

α est le rapport cyclique, avec α=1/2 et T=2π.10⁻⁵s. Représenter le spectre de décomposition de Fourier de la tension d'entrée, puis celui de la tension de sortie pour chacun des deux filtres.

Exercice 3 : Filtrage d'une tension en rampe montante

On applique la tension périodique de période T, définie par : $t \in]0, T[$: $u_e(t) = \frac{E}{T}t$ à l'entrée d'un filtre RL. On donne : T=20ms ; R=5Ω ; L=10 mH.

1) Faire une étude du filtre : nature, fonction de transfert, gain G et déphasage θ.

2) Calculer les paramètres C_{ne} et φ_{ne} de la décomposition Fourier de la tension d'entrée $u_e(t)$.

3) En déduire les paramètres C_{ns} et φ_{ns} de la décomposition Fourier de la tension de sortie $u_s(t)$.

Exercice 4 : Opérations sur les signaux

1) On considère le signal carré, d'amplitude crête à crête *2E*, périodique de période *T* avec :

- Pour $0 \leq t \leq T/2$; $v_e(t) = E$
- Pour $T/2 \leq t \leq T$; $v_e(t) = -E$

1-a) Représenter $v_e(t)$, exprimer son développement en série de Fourier et tracer son spectre d'amplitude.

1-b) Translation temporelle : le signal $v_s(t)$ est retardée d'une valeur $\theta = T/4$ et $v_s(t)$ est tel que $v_s(t) = v_e(t - \theta)$. Représenter $v_s(t)$, exprimer son développement en série de Fourier et tracer son spectre d'amplitude : conclusion.

1-c) Translation de niveau : On ajoute au signal $v_e(t)$ une valeur constante *E*. Représenter $v_s(t)$, exprimer son développement en série de Fourier et tracer son spectre d'amplitude : conclusion.

2) Dérivation : On considère le signal triangulaire $v_e(t)$ d'amplitude crête à crête *2V* périodique de période *T* avec $v_e(0) = V$ et $v_e(T/2) = -V$. $v_s(t)$ est tel que $v_s(t) = \tau \frac{dv_e(t)}{dt}$. Représenter $v_s(t)$, à l'aide du développement en série de Fourier de $v_e(t)$ en déduire celui de $v_s(t)$. Montrer qu'en choisissant convenablement la valeur de τ on retrouve un signal carré d'amplitude crête à crête *2E*.

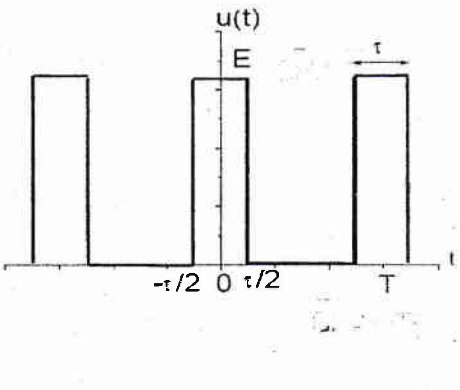
3) Translation fréquentielle : On considère deux signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$ appliqués aux entrées d'un multiplicateur analogique tel que $v_s(t) = K.v_1(t).v_2(t)$.

3-a) Pour $v_1(t) = V_1 \cos\omega_1 t$, $v_2(t) = V_2 \cos\omega_2 t$ avec $\omega_2 >> \omega_1$, représenter l'allure de $v_s(t)$ ainsi que son spectre d'amplitude.

3-b) lorsque $v_1(t)$ est un signal carré d'amplitude E et de pulsation $\omega_0 << \omega_2$ avec $v_2(t) = V_2 \cos\omega_2 t$, exprimer $v_s(t)$ sous la forme d'une somme infinie de sinusoïdes et représenter son spectre d'amplitude.

Exercice 5 : Signal rectangulaire impulsionnel pair

Soit le signal périodique formé par la répétition périodique (période T) d'impulsion de durée τ (représenté sur la figure). On définit le rapport cyclique par $\alpha = \frac{\tau}{T}$.



1. Déterminer les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier.

2. Pour un signal carré, montrer que les harmoniques paires s'annulent à l'exception de l'ordre 0. Existe-t-il d'autres valeurs du rapport cyclique pour lesquelles cette propriété est vraie ?

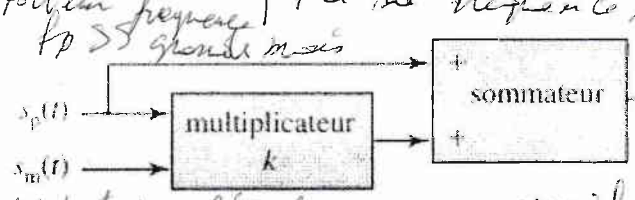
3. Commenter l'évolution des coefficients du développement au fur et à mesure que la durée de l'impulsion diminue.

Exercice 6 : Spectre d'un signal modulé sinusoïdalement en amplitude

Pour emettre un signal il faut que sa frequence soit très élevée

Un signal porteur $s_p(t) = A_p cos(2\pi f_p t)$ est modulé en amplitude lorsque son amplitude A_p est fonction d'un signal modulant $s_m(t)$ de fréquence $f_m \ll f_p$. Dans le cas d'une modulation sinusoïdale, le signal modulant est sinusoïdal $s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ et le signal modulé est de la forme $s(t) = A_p[1 + m cos(2\pi f_m t)]cos(2\pi f_p t)$, où m est l'indice de modulation.

Porteur fréquence $f_p \gg$ grande mais



$s(t)$ signal modulé qui va transporter S_p et S_m

ne porte pas l'info

Sm porte l'info mais fm << petit signal modulant

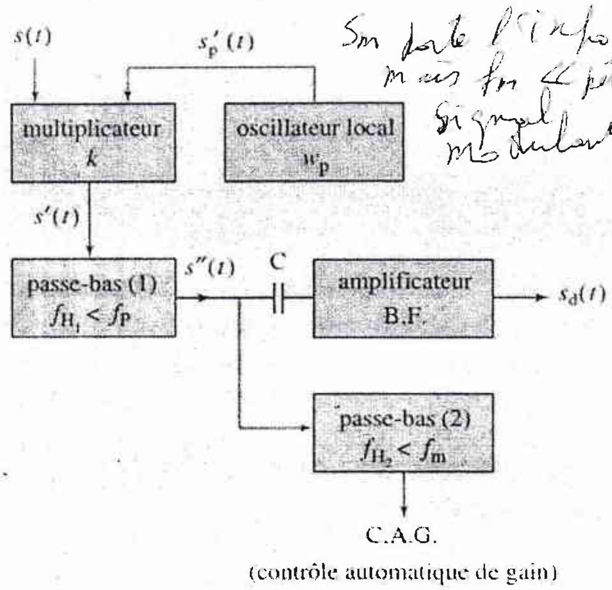
1. Le modulateur utilisé étant représenté ci-contre, calculer l'indice de modulation m.

2. Déterminer le spectre de fréquence du signal modulé *s(t)*.

3. Donner l'allure du signal modulé pour un indice de modulation $m < 1$.

4. Calculer la bande passante nécessaire à la transmission d'un signal audio encombrant la plage de fréquence $f_{m_1} = 300Hz \leq f_m \leq f_{m_2} = 4{,}5kHz$, sachant que la porteuse utilisée est de fréquence $f_p = 1MHz$.

5. En admettant que nous disposons, à la réception, d'un oscillateur local $s_p' = A_p' cos(2\pi f_p t)$ synchrone de l'oscillateur utilisé à l'émission, expliquer le principe du circuit représenté ci-après, où le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure f_{H_1} telle que $f_{H_1} < f_p$ et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure $f_{H_2} < f_m$.



Exercice 7 : Signal redressé monoalternance

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in \left[-\dfrac{T}{2}, 0\right]; \\ E \sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right), & \text{pour } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]. \end{cases}$$

Le signal *s(t)* (nommé tension redressée monoalternance) est une fonction périodique de période *T* du temps et de fréquence *f = 50 Hz*

1. Représenter la fonction s en fonction du temps *t*.

2. Donner les expressions et valeurs numériques de la période *T* et de la pulsation *ω* de *s(t)*.

3. Développer *s(t)* en série de Fourier.

4. Calculer le facteur de forme F et le taux d'ondulation δ_0 de ce signal.

Exercice 8

Un signal *s(t)* peut être décomposé en série de Fourier de la façon suivante :
$s(t) = 5 + 7\sin(500t) + 10\sin(1000t) + 2\sin(1500t) + 1{,}5\sin(2000t)$

Représenter le spectre de *s(t)*.

Exercice 9

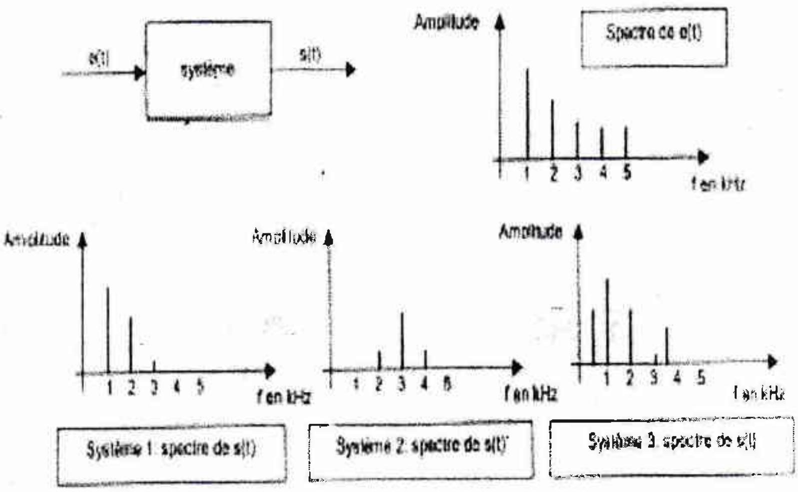
Soit un système physique qui, à une grandeur d'entrée fonction du temps *e(t),* fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps *s(t)*. A quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ? On étudie expérimentalement plusieurs systèmes (système 1, système 2 et système 3) à l'aide d'un analyseur numérique. Pour cela on applique à leur entrée le même signal *e(t)*.

(a) Qu'appelle-t-on spectre de Fourier d'un signal périodique *s(t)*.

(b) Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?

(c) Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?

On donne ci-contre les spectres de Fourier du signal *e(t)* et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.



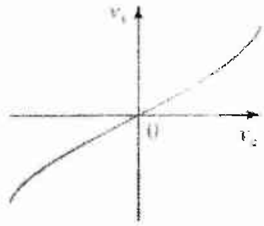
Exercice 10

1) Calculer, en utilisant sa définition, la valeur efficace I d'un courant sinusoïdal redressé double alternance. Comparer au signal non redressé.

2) Ce courant redressé est filtré par un filtre passe bas parfait, de fréquence de coupure f_H. Déterminer la valeur minimale de la fréquence de coupure pour que 99% de la puissance moyenne soit transmise. Comparer au signal non redressé.

Exercice 11 : Distorsion harmonique d'un amplificateur

La caractéristique $v_s = f(v_e)$, donnée ci-contre, est celle d'un amplificateur soumis à des tensions sinusoïdales $v_e(t) = v_{e_m}\cos(\omega t)$ dont les fréquences sont comprises dans sa bande passante. Sachant que l'équation de cette caractéristique est de la forme $v_s = av_e + bv_e^3$ $(a > 0, b > 0)$, déterminer le taux de distorsion harmonique δ_h de cet amplificateur.



TD n°1 ELECTRONIQUE

Exercice 1 : Questions préliminaires

1- a) Développement de Fourier de $f(t) = \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi)$

$f(t) = \frac{1}{2}[\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi]$; $(\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)])$

$= \frac{1}{2}\cos\phi + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \phi)$

$f(t) = \frac{1}{2}\cos\phi + \frac{1}{2}\cos\phi\cos(2\omega t) - \frac{1}{2}\sin\phi\sin(2\omega t)$

$a_0 = \frac{1}{2}\cos\phi$, $a_2 = \frac{1}{2}\cos\phi$; $b_2 = -\frac{1}{2}\sin\phi$

$a_n = 0$ $n \neq 0$ et $n \neq 2$; ~~$b_n \neq$~~ $b_n = 0$ $n \neq 2$

b) Pas de fondamental ; harmoniques présentes 2ω (harmonique d'ordre 2)

Par définition $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{2}\cos\phi$

2) $f(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t + \phi)$; $\langle f^2(t) \rangle$

$f^2(t) = A^2\cos^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t + \phi) + 2AB\cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi)$

or $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{2}$ et

$\langle \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{2}\cos\phi$

$\langle f^2(t) \rangle = A^2\langle \cos^2(\omega t) \rangle + B^2\langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle + 2AB\langle \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi) \rangle$

$\langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) + AB\cos\phi$

3- a) $p(t) = \cos(\omega t)\cos(\Omega t + \phi)$; $\langle p(t) \rangle$

$p(t) = \frac{1}{2}[\cos[(\omega + \Omega)t + \phi] + \cos[(\Omega - \omega)t + \phi]]$

$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2}[\langle \cos[(\omega + \Omega)t + \phi] \rangle + \langle \cos[(\Omega - \omega)t + \phi] \rangle]$

$\langle p(t) \rangle = 0$

b) $S(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\Omega t + \phi)$, $\langle S^2(t)\rangle$

$$S^2(t) = A^2\cos^2(\omega t) + B^2\cos^2(\Omega t + \phi) + 2AB\cos(\omega t)\cos(\Omega t + \phi)$$

$$\langle S^2(t)\rangle = A^2\underbrace{\langle\cos^2(\omega t)\rangle}_{=\frac{1}{2}} + B^2\underbrace{\langle\cos^2(\Omega t+\phi)\rangle}_{=\frac{1}{2}} + 2AB\underbrace{\langle\cos(\omega t)\cos(\Omega t+\phi)\rangle}_{=0}$$

$$\langle S^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right)$$

Exercices d'apprentissage

Exercice 1 : tension efficace de signaux périodiques

Calculer la valeur efficace U_{eff} de la tension u(t), périodique de période T et amplitude U_m, dans chacun des cas suivants :

1) u(t) est une tension sinusoïdale
2) u(t) est une tension rectangulaire
3) u(t) est une tension triangulaire

Solution

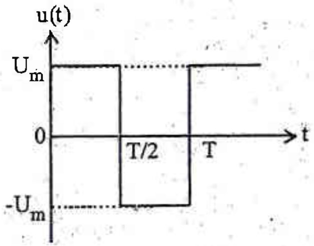
1) Soit : $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ avec : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Par définition : $U_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\dfrac{U_m^{\,2}}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt}$

Par linéarisation, on obtient : $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2\omega t)$ d'où :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{U_m^{\,2}}{T}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T} = \sqrt{\frac{U_m^{\,2}}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega}\underbrace{\sin\left(\underbrace{2\omega T}_{4\pi}\right)}_{=0}\right)} = \boxed{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}.$$

2) u(t) est définie par intervalles. Il convient de choisir judicieusement l'origine des temps afin de limiter à deux le nombre d'intervalles sur une période

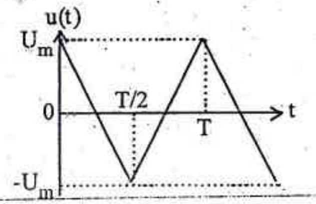


(figure ci-contre) : $\begin{cases} t \in \left]0, \dfrac{T}{2}\right[& : \ u(t) = U_m \\ t \in \left]\dfrac{T}{2}, T\right[& : \ u(t) = -U_m \end{cases}$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} U_m^{\,2}dt + \int_{T/2}^T (-U_m)^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{U_m^{\,2}}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right)}$$

soit finalement: $\boxed{U_{eff} = U_m}$.

3) Soit : $\begin{cases} t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] & : \ u(t) = -\dfrac{4U_m}{T}t + U_m \\ t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right] & : \ u(t) = \dfrac{4U_m}{T}t - 3U_m \end{cases}$



$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2}\left(-\frac{4U_m}{T}t + U_m\right)^2 dt + \int_{T/2}^T\left(\frac{4U_m}{T}t - 3U_m\right)^2 dt\right]}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{U_m^{\,2}}{T}\left[\int_0^{T/2}\left(\frac{16t^2}{T^2} - \frac{8t}{T} + 1\right)dt + \int_{T/2}^T\left(\frac{16t^2}{T^2} - \frac{24t}{T} + 9\right)dt\right]}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{U_m^{\,2}}{T}\left(\left[\frac{16t^3}{3T^2} - \frac{4t^2}{T} + t\right]_0^{T/2} + \left[\frac{16t^3}{3T^2} - \frac{12t^2}{T} + 9t\right]_{T/2}^T\right)}$$

$$U_{eff} = U_m\sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{16}{3} - 12 + 9\right) - \left(\frac{2}{3} - 3 + \frac{9}{2}\right)} = \boxed{\frac{U_m}{\sqrt{3}}}.$$

Exercice 2 : coefficients de Fourier d'une tension triangulaire

Soit la tension triangulaire u(t), d'amplitude U_m et de période T, définie par intervalles à la question 3 de l'exercice précédent. On pose : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de la décomposition de u(t).
2) Calculer numériquement ces coefficients pour $n \leq 8$, et tracer les graphes obtenus par superposition progressive des contributions à u(t) des 9 premières fréquences.

Solution

1) u(t) étant paire, les coefficients B_n sont tous **nuls.**

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2}\left(-\frac{4U_m}{T}t + U_m\right)dt + \int_{T/2}^T\left(\frac{4U_m}{T}t - 3U_m\right)dt\right]$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{U_m}{T}\left(\left[-\frac{2t^2}{T} + t\right]_0^{T/2} + \left[\frac{2t^2}{T} - 3t\right]_{T/2}^T\right)$$

$$\frac{A_0}{2} = U_m\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + (2-3) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\right] = \boxed{0}$$

: la valeur moyenne est nulle, ce qui était prévisible. Pour $n \geq 1$:

$$A_n = \frac{2}{T}\left[\underbrace{\int_0^{T/2}\left(-\frac{4U_m}{T}t + U_m\right)\cos(n\omega t)dt}_{I_n} + \underbrace{\int_{T/2}^T\left(\frac{4U_m}{T}t - 3U_m\right)\cos(n\omega t)dt}_{J_n}\right]$$

I_n se calcule par intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} v(t) = -\dfrac{4U_m}{T}t + U_m \\ w'(t) = \cos(n\omega t) \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} v'(t) = -\dfrac{4U_m}{T} \\ w(t) = \dfrac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) \end{cases}$$

$$I_n = \left[\frac{1}{n\omega}\left(-\frac{4U_m}{T}t + U_m\right)\sin(n\omega t)\right]_0^{T/2} + \int_0^{T/2} \frac{4U_m}{n\omega T}\sin(n\omega t)\,dt$$

Compte tenu que $\omega T = 2\pi$, le terme entre crochets est nul et :

$$I_n = \frac{2U_m}{n\pi}\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2U_m}{n^2\pi\omega}\left[-\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{2U_m}{n^2\pi\omega}\left[\cos(0) - \cos(n\pi)\right]$$

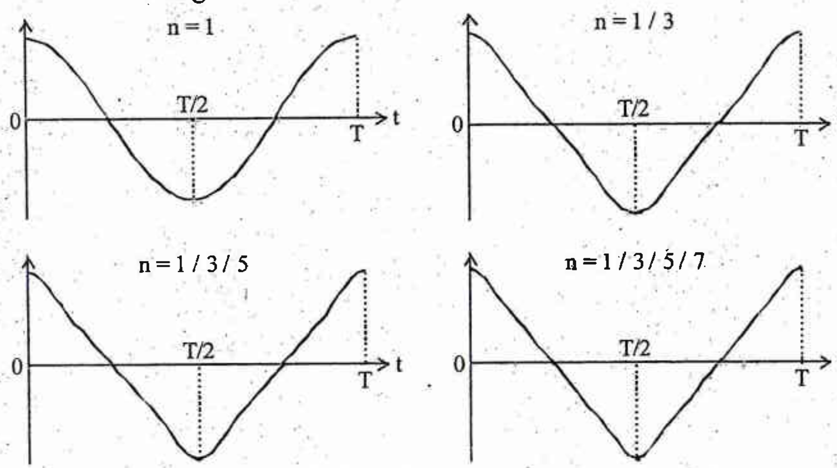
Finalement : $I_n = \dfrac{2U_m}{n^2\pi\omega}\left[1-(-1)^n\right]$ et : $J_n = \dfrac{2U_m}{n^2\pi\omega}\left[\cos(n\omega t)\right]_{T/2}^{T} = I_n$

d'où : $A_n = \dfrac{2}{T}(2I_n) = \dfrac{4U_m}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]$ donc : $\boxed{\begin{cases} \text{si n pair : } A_n = 0 \\ \text{si n impair : } A_n = \dfrac{8U_m}{n^2\pi^2} \end{cases}}$

2)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
A_n	$0{,}811U_m$	0	$0{,}090U_m$	0	$0{,}032U_m$	0	$0{,}017U_m$	0

La figure ci-dessous représente les tensions obtenues par superposition des contributions de rang :



La fondamentale est purement sinusoïdale, et la tension u(t) est progressivement recomposée à mesure qu'on ajoute des contributions supplémentaires.

Exercice 3 : tension rectangulaire

Soit la tension rectangulaire u(t), périodique de période T, définie par :

$$\begin{cases} t \in \left]0, \alpha T\right[: \; u(t) = E \\ t \in \left]\alpha T, T\right[: \; u(t) = 0 \end{cases}$$ α est le rapport cyclique, et on pose : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Calculer les coefficients de Fourier de la décomposition de u(t).

Solution

La valeur moyenne vaut : $\dfrac{A_0}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,dt = \dfrac{1}{T}\left(\int_0^{\alpha T} E\,dt + \int_{\alpha T}^{T} 0\,dt\right) = \boxed{\alpha E}$.

$$A_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\alpha T} E\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\alpha T}^{T} 0.\cos(n\omega t)\,dt\right) = \frac{2E}{n\omega T}\left[\sin(n\omega t)\right]_0^{\alpha T}$$

d'où : $\boxed{A_n = \dfrac{E}{n\pi}\sin(2\pi n\alpha)}$.

$$B_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\alpha T} E\sin(n\omega t)\,dt + \int_{\alpha T}^{T} 0.\sin(n\omega t)\,dt\right) = \frac{2E}{n\omega T}\left[-\cos(n\omega t)\right]_0^{\alpha T}$$

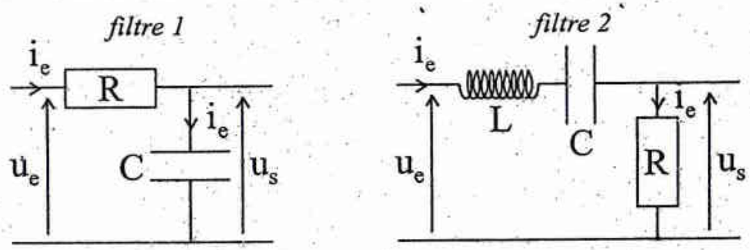
d'où : $\boxed{B_n = \dfrac{E}{n\pi}\left[1 - \cos(2\pi n\alpha)\right]}$.

En résumé :

$$\boxed{u(t) = \alpha E + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E}{n\pi}\left\{\sin(2\pi n\alpha)\cos(n\omega t) + \left[1-\cos(2\pi n\alpha)\right]\sin(n\omega t)\right\}}.$$

Exercice 4 : décomposition de Fourier après filtrage

1) Qualifier les deux filtres ci-dessous, et calculer leur gain, leur déphasage et leur(s) pulsation (s) de coupure. *AN* : $R = 500\ \Omega$; $L = 10$ mH ; $C = 10$ nF.

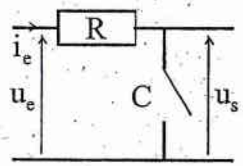


2) On applique en entrée la tension rectangulaire de l'exercice précédent avec $\alpha = ½$ et $T = 2\pi.10^{-5}$s. Représenter le spectre de décomposition de Fourier de la tension d'entrée, puis celui de la tension de sortie pour chacun des deux filtres.

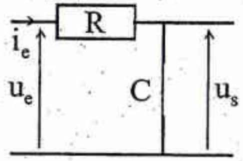
Solution

1) Etudions les deux filtres en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

• **Filtre 1** : pour $\omega = 0$: $i_e = 0$ donc $Ri_e = 0$ et $u_s = u_e$: passant.



pour $\omega \to \infty$: $u_s = 0$: non passant. Donc le filtre est **passe-bas**.



Pont diviseur de tension : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}} = \dfrac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

$\boxed{G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}}$. $G(\omega)$ est maximal pour $\omega = 0$, ce qui confirme le caractère passe-bas du filtre, et : $G_{max} = 1$.

La pulsation de coupure ω_c vérifie : $\dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_C)^2}} = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ soit :

$(RC\omega_C)^2 = 1$ et : $\boxed{\omega_C = \dfrac{1}{RC} = 2.10^5\,\text{rad.s}^{-1}}$. De plus : $\boxed{\varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega)}$.

• **Filtre 2** : posons : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$ et : $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Pour $\omega = 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et $i_e = 0$ donc $u_s = 0$ (non passant). Pour $\omega \to \infty$, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et $i_e = 0$ donc $u_s = 0$ (non passant) : le filtre est **passe-bande**.

Pont diviseur de tension : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{R}{R + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} = \dfrac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$

$\boxed{G(x) = \left[1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{-1/2}}$ et : $\boxed{\varphi(x) = -\arctan\left[Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right]}$.

G est maximal lorsque le radical sous la racine est minimal, soit, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs, pour $x - \dfrac{1}{x} = 0$. Donc : $x_r = 1$ et $G_{max} = 1$.

Les pulsations de coupure vérifient : $\dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_C - \dfrac{1}{x_C}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ soit encore :

$Q^2\left(x_C - \dfrac{1}{x_C}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x_C^{\,2} \pm \dfrac{x_C}{Q} - 1 = 0 \Leftrightarrow x_C = \pm\dfrac{1}{2Q} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4}$

Seules 2 des 4 solutions sont positives : $x_{C1,2} = \pm\dfrac{1}{2Q} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4}$.

Finalement : $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et : $\omega_{C1,2} = \pm\dfrac{R}{2L} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R^2}{L^2} + \dfrac{4}{LC}}$. Numériquement :

$\boxed{\omega_r = 10^5\,\text{rad.s}^{-1}}$ $\boxed{\omega_{C1} = 7{,}8.10^4\,\text{rad.s}^{-1}}$ et : $\boxed{\omega_{C2} = 1{,}28.10^5\,\text{rad.s}^{-1}}$.

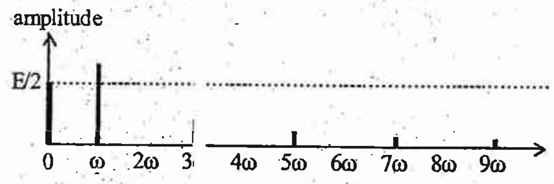
2) Avec $\alpha = ½$: $\sin(2\pi n\alpha) = \sin(n\pi) = 0$ et : $\cos(2\pi n\alpha) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

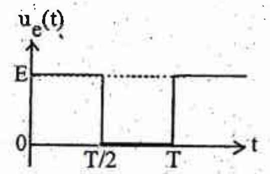
La tension d'entrée s'écrit donc : $u_e(t) = \dfrac{E}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{E}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\sin(n\omega t)$.

Par ailleurs : $\omega = 2\pi/T = 10^5\,\text{rad.s}^{-1}$. Calculons les amplitudes des contributions majoritaires de u_e, qui correspondent forcément aux pulsations les plus basses à cause de la décroissance en 1/n des coefficients de Fourier :

pulsation (rad.$^{-1}$)	0	10^5	2.10^5	3.10^5	4.10^5	5.10^5	6.10^5	7.10^5	8.10^5	9.10^5
amplitude	$\dfrac{E}{2}$	$\dfrac{2E}{\pi}$	0	$\dfrac{2E}{3\pi}$	0	$\dfrac{2E}{5\pi}$	0	$\dfrac{2E}{7\pi}$	0	$\dfrac{2E}{9\pi}$

On reproduit ci-dessous le spectre de décomposition de Fourier et le graphe de la tension d'entrée :

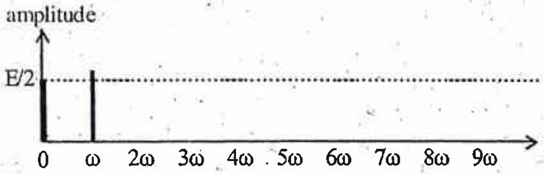


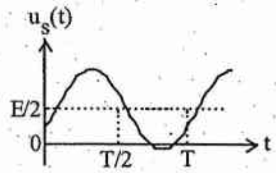


• **Tension à la sortie du filtre 1 :**

Le filtre 1 est un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_C = 2.10^5\,\text{rad.s}^{-1}$. En première approximation, on peut considérer que seules les contributions du spectre de la tension d'entrée dont les pulsations sont inférieures à ω_C passent à travers le filtre et se recombinent pour former la tension de sortie, les autres contributions étant coupées. La contribution de pulsation ω est atténuée d'un facteur $G(\omega) = 0{,}89$ et déphasée de $\varphi(\omega) = -0{,}46$ rad.

D'où le spectre de décomposition de Fourier et le graphe de la tension de sortie :



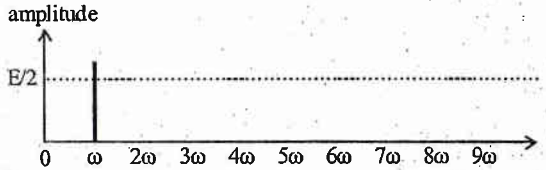


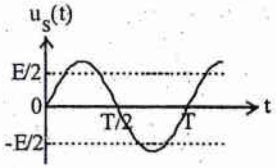
Le filtre a transformé la tension rectangulaire en tension **sinusoïdale** de valeur moyenne égale à E/2.

- **Tension à la sortie du filtre 2 :**

Le filtre 2 est un filtre passe-bande de pulsation de résonance $\omega_r = 10^5$ rad.s^{-1} et pulsations de coupure $\omega_{C1} = 7{,}8.10^4$ rad.s^{-1} et $\omega_{C2} = 1{,}28.10^5$ rad.s^{-1}. On peut considérer que seules les contributions du spectre de la tension d'entrée dont les pulsations sont comprises entre ω_{C1} et ω_{C2} passent à travers le filtre et se recombinent pour former la tension de sortie. La contribution de pulsation ω n'est ni atténuée ni déphasée car $G(\omega) = 1$ et $\varphi(\omega) = 0$.

D'où le spectre de décomposition de Fourier et le graphe de la tension de sortie :





Le filtre a transformé la tension rectangulaire en tension **sinusoïdale** de valeur moyenne nulle.

Exercice 5 : filtrage d'une tension en rampe montante

On applique la tension périodique $u_e(t)$ représentée figure 1 à l'entrée du filtre RL représenté figure 2.

figure 1

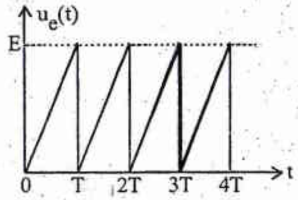
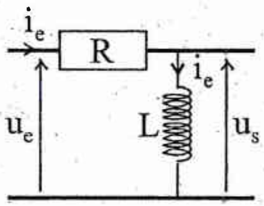


figure 2



On donne : T = 20 ms ; R = 5 Ω ; L = 10 mH.

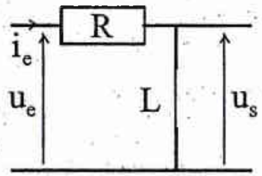
1) Faire une étude du filtre : nature, fonction de transfert, gain G et déphasage θ.

2) Calculer les paramètres C_{ne} et φ_{ne} de la décomposition Fourier de la tension d'entrée $u_e(t)$.

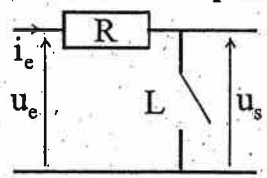
3) En déduire les paramètres C_{ns} et φ_{ns} de la décomposition Fourier de la tension de sortie $u_s(t)$.

Solution

1) pour $\omega = 0$: $u_s = 0$: non passant.



pour $\omega \to \infty$: $i_e = 0$, $Ri_e = 0$ et $u_s = u_e$: passant. Donc le filtre est **passe-haut.**



Pont diviseur de tension : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{\underline{Z_L}}{R + \underline{Z_L}} = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}$.

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\theta(\omega) = \pi/2 - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)}.$$

2) La fonction $u_e(t)$ est définie par : $t \in \left]0, T\right[$: $u_e(t) = \dfrac{E}{T}t$.

$$\frac{A_{0e}}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T u_e(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E}{T}tdt = \frac{E}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{E}{2}.$$

$$A_{ne}' = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E}{T}t.\cos(n\omega t)dt$$

A_{ne} se calcule par intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{E}{T}t \\ w'(t) = \cos(n\omega t) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} v'(t) = \dfrac{E}{T} \\ w(t) = \dfrac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) \end{cases}$$

Sachant que $\omega T = 2\pi$:

$$A_{ne} = \frac{2}{T}\left[\frac{E}{n\omega T}t.\sin(n\omega t)\right]_0^T - \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E}{n\omega T}\sin(n\omega t)dt = 0.$$

$$B_{ne} = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E}{T}t.\sin(n\omega t)d$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$B_{ne} = \frac{2}{T}\left[-\frac{E}{n\omega T}t.\cos(n\omega t)\right]_0^T + \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E}{n\omega T}\cos(n\omega t)dt = -\frac{E}{n\pi}.$$

Les paramètres C_{ne} et φ_{ne} se déduisent des relations :

$$C_{ne} = \sqrt{A_{ne}^{2} + B_{ne}^{2}} \quad \text{et :} \quad \varphi_{ne} = \arccos\left(\frac{A_{ne}}{C_{ne}}\right).$$

Finalement : $\boxed{C_{0e} = \frac{E}{2}}$ $\boxed{C_{ne} = \frac{E}{n\pi}}$ $\boxed{\varphi_{0e} = 0}$ $\boxed{\varphi_{ne} = \pi/2}$.

3) Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs approchées de C_{ne}, φ_{ne}, G_n, θ_n, C_{ns} et φ_{ns} pour les premières valeurs de n, avec $\omega = 2\pi/T = 100\pi$ rad.s^{-1} et compte tenu des relations suivantes :

$$\boxed{C_{ns} = G_n.C_{ne}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\varphi_{ns} = \varphi_{ne} + \theta_n}.$$

n	C_{ne}	φ_{ne} (rad)	G_n	θ_n (rad)	C_{ns}	φ_{ns} (rad)
0	0,5E	0	0	1,57	0	1,57
1	0,318E	1,57	0,532	1,01	0,169E	2,58
2	0,159E	1,57	0,782	0,672	0,124E	2,24
3	0,106E	1,57	0,883	0,488	0,094E	2,06
4	0,080E	1,57	0,929	0,379	0,074E	1,95
5	0,064E	1,57	0,953	0,308	0,061E	1,88
6	0,053E	1,57	0,967	0,259	0,051E	1,83
7	0,045E	1,57	0,975	0,224	0,044E	1,79
8	0,040E	1,57	0,981	0,196	0,039E	1,77
9	0,035E	1,57	0,986	0,175	0,035E	1,74
10	0,032E	1,57	0,988	0,158	0,032E	1,73

Autrement dit :

$$\boxed{u_s(t) = 0,169E\cos(\omega t + 2,58) + 0,124E\cos(2\omega t + 2,24) + 0,094E\cos(3\omega t + 2,06) + \text{etc...}}$$

La composante continue (valeur moyenne) est coupée. Les autres contributions sont d'autant plus atténuées et déphasées que n est faible, ce qui confirme le caractère passe-haut du filtre.

Exercices d'évaluation

Exercice 6 : spectre de décomposition de Fourier

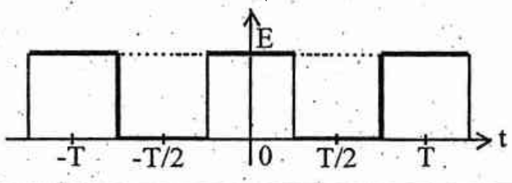
Donner le spectre de décomposition de Fourier de la tension :

$$u(t) = E\cos[(\omega_0 - a)t].\cos[(\omega_0 + a)t] \qquad (a < \omega_0).$$

Indication : penser aux transformations trigonométriques produit → somme.

Exercice 7 : coefficients de Fourier d'une tension carrée

Calculer les coefficients de la décomposition en série de Fourier de la tension carrée u(t) représentée ci-dessous.



Exercice 8 : coefficients de Fourier d'une tension de sortie

Le spectre de décomposition de Fourier d'une tension est constitué de quatre segments d'égale amplitude 1V pour les pulsations 0 rad.s^{-1}, $10^{-2}\omega_0$, ω_0 et $100\,\omega_0$, ω_0 étant une pulsation constante.

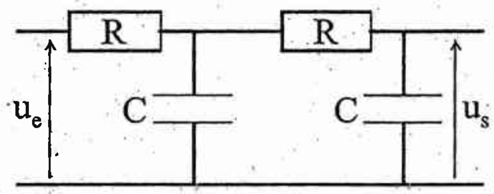
Cette tension est appliquée à l'entrée d'un filtre dont la fonction de transfert vaut :

$$\underline{H} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}.$$

Déterminer les coefficients C_s de la décomposition de Fourier de la tension de sortie du filtre. En déduire une qualification du filtre.

Exercice 9 : filtre en cascade

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre en cascade ci-dessous fonctionnant en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω. Qualifier le filtre.



Indication : on pourra utiliser deux ponts diviseurs de tension appliqués à des dipôles en série judicieusement choisis.

Solutions des exercices d'évaluation

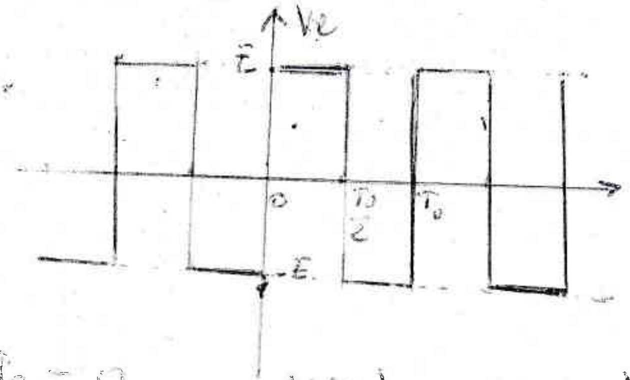
Exercice 6 :

$$u(t) = \frac{E}{2}\cos(2at) + \frac{E}{2}\cos(2\omega_0 t)$$

Exercice 4 : operation sur les signaux.

1. Signal carré, d'amplitude crête à crête $2E$, période

- pour $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$; $V_e(t) = E$.
- pour $\frac{T}{2} \leq t \leq T$; $V_e(t) = -E$



$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} V_e(t)\,dt$$

$$= \frac{E}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -dt + \int_0^{T} dt\right.$$

$$= \frac{E}{T}\left\{-[t]_{-\frac{T}{2}}^{0} + [t]\right.$$

$a_0 = 0$

$V_e(t) = -V_e(-t) \Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2E}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\sin n\omega t\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t\,dt\right\}$$

$$= \frac{+2E}{Tn\omega}\left\{[\cos n\omega t]_{-\frac{T}{2}}^{0} - [\cos n\omega t]_0^{T/2}\right\}$$

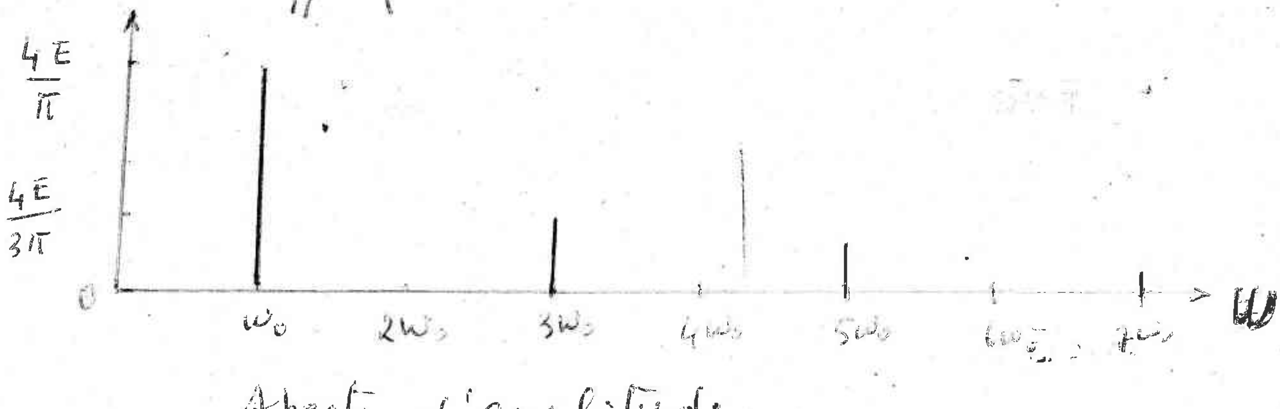
$$= \frac{2E}{2\pi n}\left[1 - \cos n\pi - \cos n\pi \quad 1\right] = \frac{4E}{2\pi n}(1 - \cos$$

$b_{2p} = 0$

$$b_{2p+1} = \frac{4E}{\pi(2p+1)}$$

$$V_e = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t$$

$$V_e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \dots\right.$$



Spectre d'amplitude

1-b. Translation temporelle

$v_s(t) = V_e(t-\theta) \qquad \theta = \frac{T}{4}$

Expression de $V_s(t)$

$0 \le t-\theta \le \frac{T}{2} \qquad v_s(t) = V_e(t-\theta) = E$

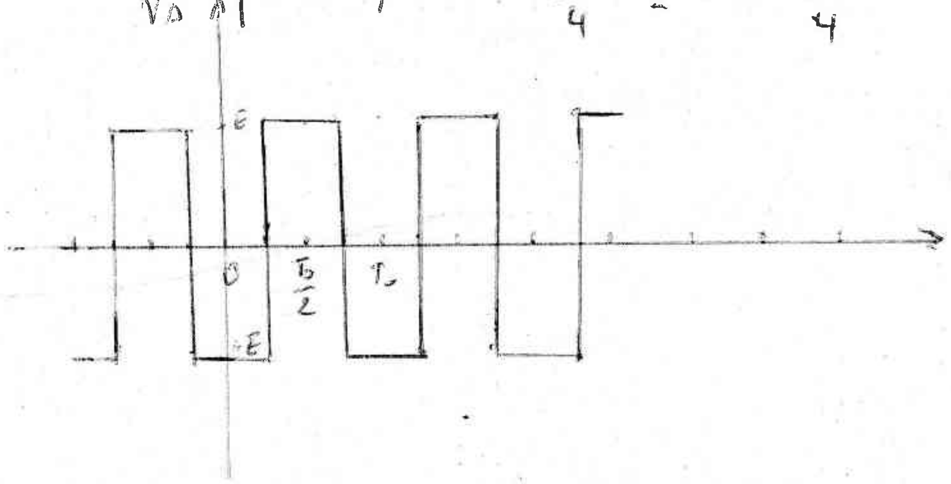
$\theta \le t \le \frac{T}{2}+\theta \qquad V_s(t) = E$

$\frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4} \qquad V_s(t) = E$ (*)

$\frac{T}{2} \le t-\theta \le T \qquad v_s(t) = v_e(t-\theta) = -E$

$\frac{3T}{4} \le t \le \frac{5T}{4} \qquad v_s(t) = -E$

$$v_s = \begin{cases} E & \text{pour } \frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4} \\ -E & \text{pour } \frac{3T}{4} \le t \le \frac{5T}{4} \end{cases}$$



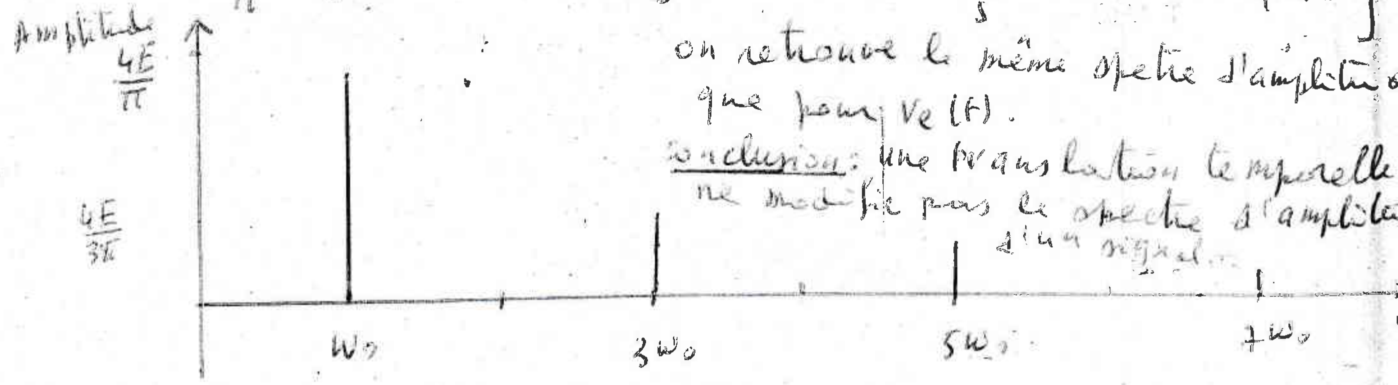
on en déduit le développement en serie de Fourier de $V_s(t)$

$V_s(t) = \frac{4E}{\pi}\left\{\sin(t-\frac{T_0}{4})\omega_0 + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0(t-\frac{T_0}{4}) + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0(t-\frac{T_0}{4})\right.$

$V_s(t) = \frac{4E}{\pi}\left\{-\cos\omega_0 t + \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t - \frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t + \dots\right\}$

on retrouve le même spectre d'amplitude que pour $V_e(t)$.

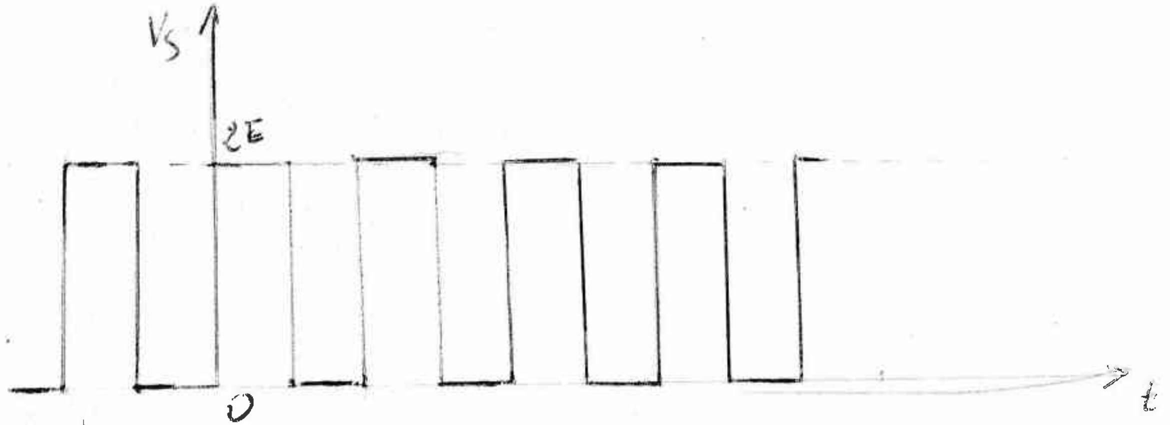
<u>Conclusion</u>: une translation temporelle ne modifie pas le spectre d'amplitude d'un signal.



1-c Translation de niveau

$V_s(t) = V_e(t) + E$.

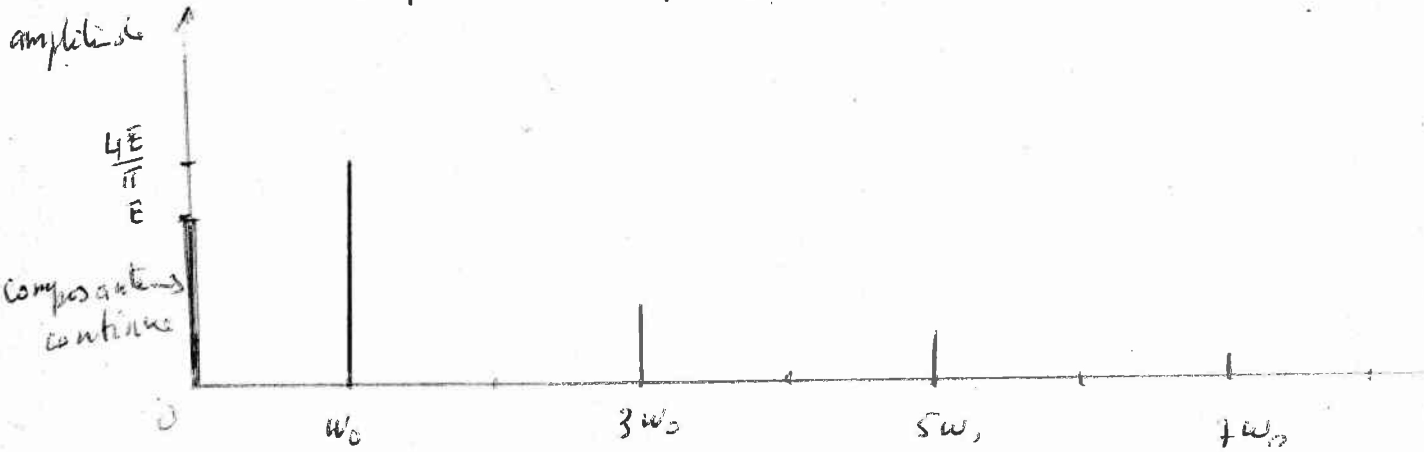
$$V_s = \begin{cases} 2E & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$



On obtient

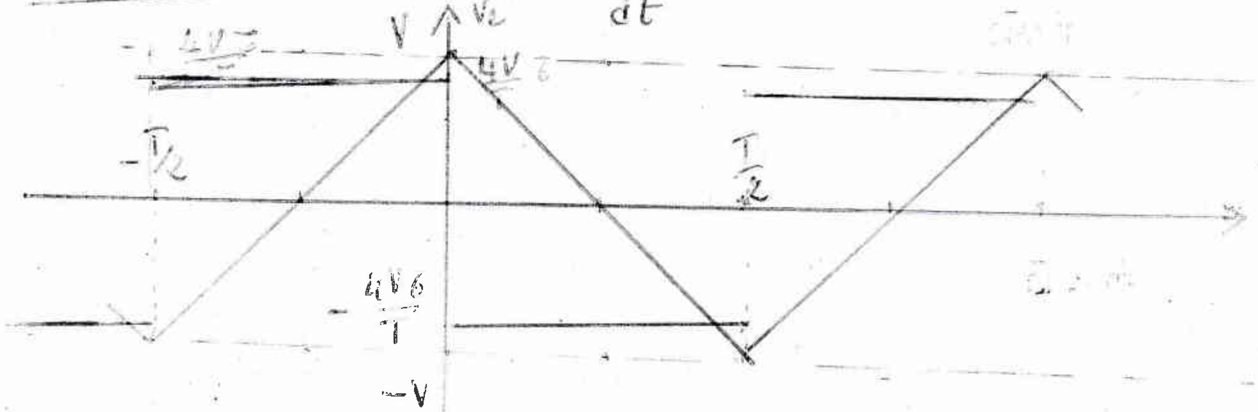
$$V_s(t) = E + \frac{4E}{\pi}\left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right]$$

Spectre d'amplitude de $V_s(t)$



<u>Conclusion</u> : Une translation de niveau modifie uniquement la composante continue pour le spectre d'amplitude d'un signal

2- <u>Dérivation</u> : $V_s(t) = \tau \frac{dV_e}{dt}$



* $t \in [-\frac{T_0}{2}, 0]$ $Ve = at + b = at + V$

$t = -\frac{T_0}{2}$ $Ve = -V = -a\frac{T}{2} + V \Rightarrow -2V = -a\frac{T}{2}$

$a = \frac{4V}{T} \Rightarrow Ve(t) = \frac{4V}{T}t + V$

* $t \in [0, \frac{T_0}{2}]$ $Ve(t) = a't + b' = a't + V$

$V(\frac{T_0}{2}) = -V = a'\frac{T}{2} + V \Rightarrow a' = -\frac{4V}{T}$

$Ve(t) = -\frac{4V}{T}t + V$

$$Ve = \begin{cases} \frac{4V}{T}t + V & \text{pour } t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ -\frac{4V}{T}t + V & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases}$$

$$Vs(t) = \begin{cases} \frac{4V\tau}{T} & \text{pour } t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ -\frac{4V\tau}{T} & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases}$$

série de Fourier de Ve

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} Ve(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} Ve\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{4V}{T}t + V\right)dt + \int_0^{T/2}\left(-\frac{4V}{T}t + V\right)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\left[\frac{2V}{T}t^2 + Vt\right]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \left[-\frac{2V}{T}t^2 + Vt\right]_0^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left(-\frac{VT^2}{2T} + \frac{VT}{2}\right) + \left(-\frac{VT^2}{2T} + \frac{VT}{2}\right)$$

$= 0$

Ve fonction paire $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} Ve(t)\cos n\omega t\,dt$$

(7)

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(-\frac{4V}{T}t+V\right)\cos n\omega t\,dt$$

$$= -\frac{16V}{T^2}\underbrace{\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos n\omega t\,dt}_{I} + \frac{4V}{T}\underbrace{\int_0^{T/2}\cos n\omega t\,dt}_{J}$$

$$J = \int_0^{T/2}\cos n\omega t\,dt = \frac{1}{n\omega}\left[\sin n\omega t\right]_0^{T/2} = \frac{1}{n\omega}(\sin n\pi - 0$$

$J = 0$

$$I = \int_0^{\frac{T}{2}} t\cos n\omega t\,dt$$

$v = t \longrightarrow v' = dt$

$u' = \cos n\omega t\,dt \longrightarrow u = \frac{1}{n\omega}\sin n\omega t$

$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv'$

$$I = \frac{1}{n\omega}\underbrace{\left[t\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}}}_{0} - \frac{1}{n\omega}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin n\omega t\,dt$$

$$I = \frac{1}{(n\omega)^2}\left[\cos n\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$I = \frac{1}{(n\omega)^2}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{-1}{(n\omega)^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$a_n = \frac{16V}{(T\omega)^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{16V}{4\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$a_n = \frac{4V}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{8V}{\pi^2(2p+1)^2}$

$$V_e(t) = \frac{8V}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)\omega t$$

$$V_s(t) = \tau\frac{dV_e}{dt} = \frac{-8V\,\tau\omega}{\pi^2}\sum\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t$$

$$V_S(t) = -\frac{8V\tau\omega}{\pi^2}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \dots\right.$$

Pour obtenir un signal carré crête à crête $2E$, il faut :

$$\frac{8V\tau\omega}{\pi^2} = \frac{16V\tau}{\pi T} = \frac{4E}{\pi}$$

$$\boxed{\tau = \frac{ET}{4V}}$$

on en déduit pour $V_S(t)$

$$V_S(t) = -\frac{8V}{\pi^2} \times \frac{ET}{4V} \times \frac{2\pi}{T} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)\omega t$$

$$V_S(t) = -\frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)\omega t$$

On retrouve bien, en multipliant par -1, le développement en série de Fourier du signal carré !

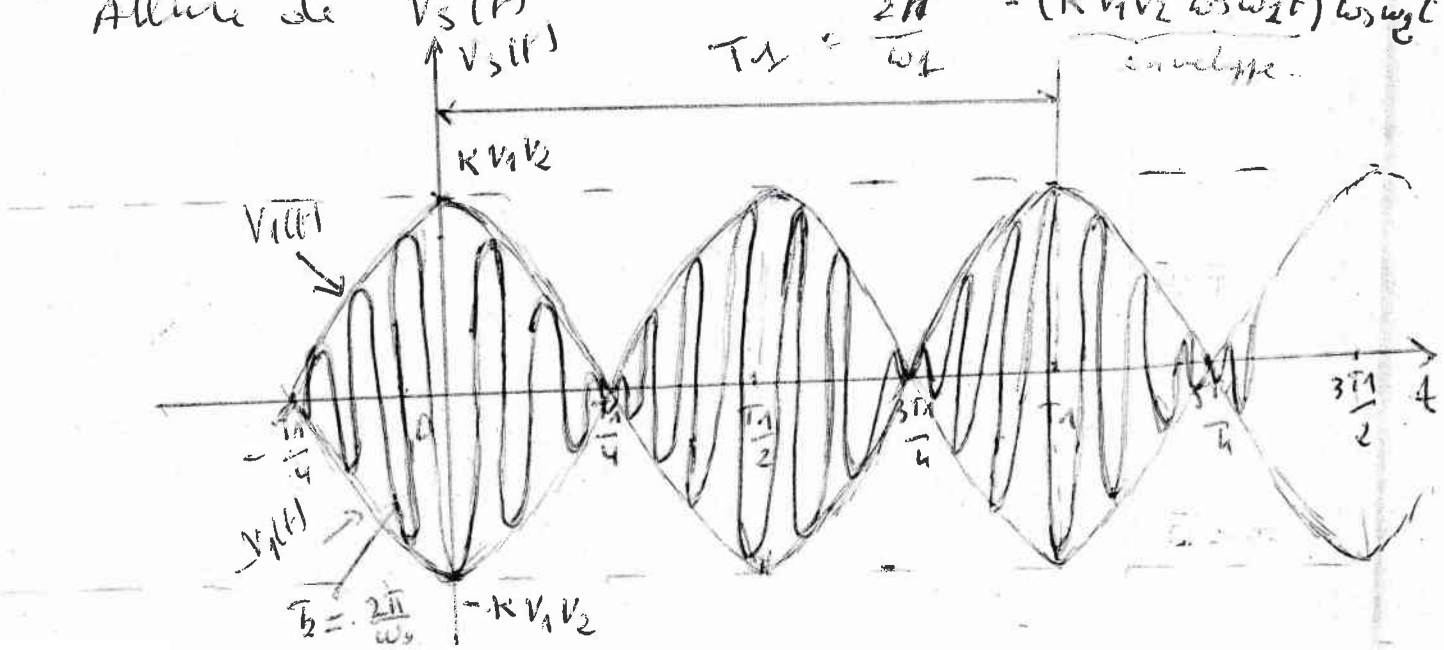
3 - Translation fréquentielle. $V_S(t) = K \cdot V_1(t) \cdot V_2(t)$

a - $V_1(t) = V_1 \cos\omega_1 t$; $V_2(t) = V_2 \cos\omega_2 t$

avec $\omega_2 \gg \omega_1$ $\quad (T_1 \gg T_2)$

$V_S = K V_1 V_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t$

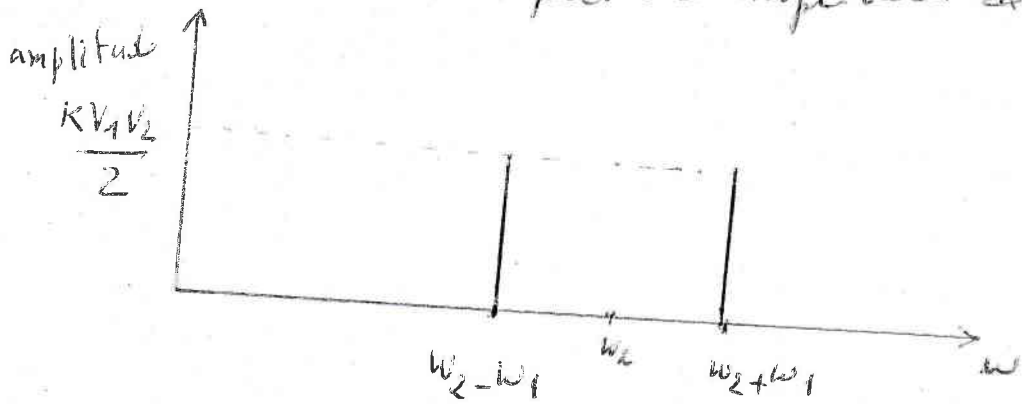
Allure de $V_S(t)$ $\quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ $\quad = \underbrace{(K V_1 V_2 \cos\omega_1 t)}_{\text{enveloppe}} \cos\omega_2 t$



D'autre part, on peut écrire Vs(t) sous la forme : (8)

$$V_S(t) = \frac{KV_1V_2}{2}\left[\cos(w_2 - w_1)t + \cos(w_2 + w_1)t\right]$$

On en déduit le spectre d'amplitude de Vs(t)



b) D'après la table des développements en série de Fourier

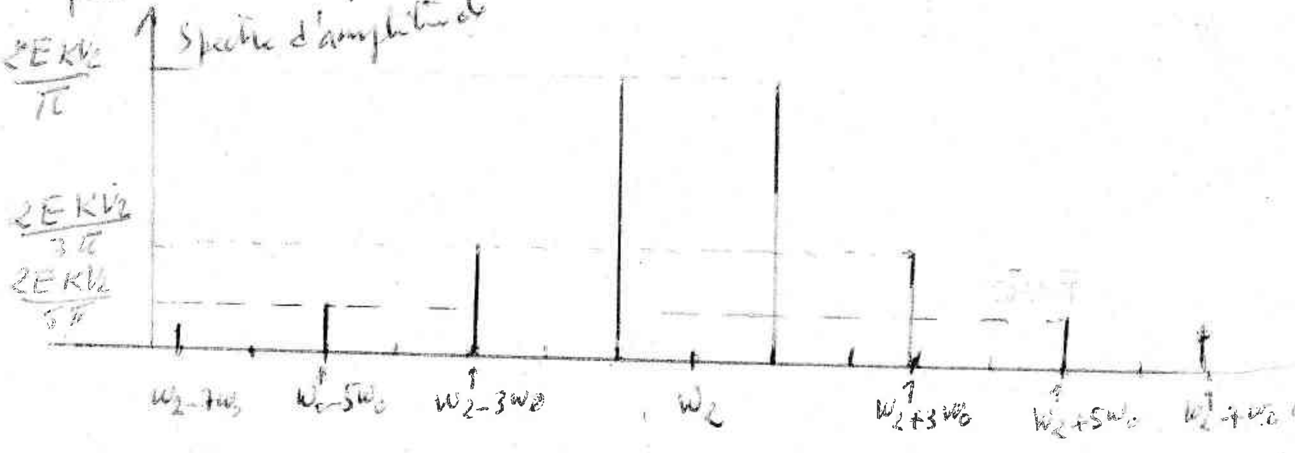
on a : $V_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)w_0 t$

$$VS(t) = K\,V_1(t)\,V_2(t)$$

$$V_S(t) = \frac{4E}{\pi} \times K V_2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)w_0 t \times \cos w_2 t$$

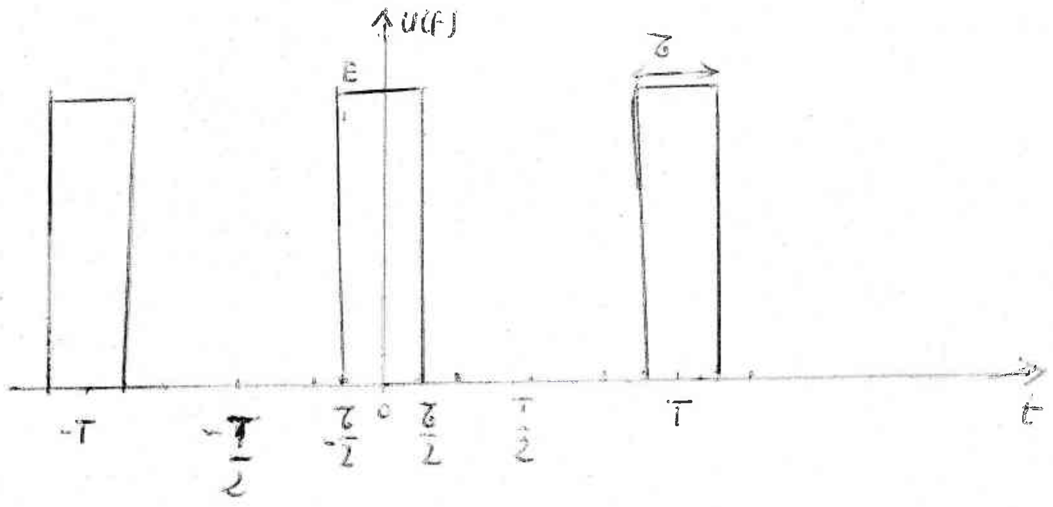
$$V_S(t) = \frac{2EKV_2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \left\{ \sin(w_2 + (2p+1)w_0)t - \sin(w_2 - (2p+1)w_0)t \right\}$$

Spectre d'amplitude.



On retrouve de part et d'autre de w_2, le spectre d'amplitude du spectre carré.

Exercice 5 Signal rectangulaire impulsionnel pair (9)



$\alpha = \frac{\tau}{T}$

1) détermination des coefficients

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_e(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\,dt = \frac{E}{T}\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$$

$$a_0 = E\frac{\tau}{T} = \alpha E.$$

u(t) est paire $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} u(t)\cos n\omega t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\omega t = \frac{2E}{Tn\omega}\left[\sin n\omega t\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$a_n = \frac{E}{\pi n}\left(\sin n\omega\frac{\tau}{2} - \sin -n\omega\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2E}{\pi n}\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2E}{\pi n}\sin\left(\frac{n\omega T\alpha}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2E}{n\pi}\sin(n\pi\alpha)$$

2. Montrons que les harmoniques paires s'annulent à l'exception de l'ordre 0 pour un signal carré.

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\tau = \frac{T}{2}$

$a_0 = \frac{1}{2}E$

$$a_n = \frac{2E}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_{2p} = \frac{2E}{\pi n}\sin(p\pi) = 0$$

Autres valeurs de α pour lesquelles $a_n = 0$.

$$a_n = \frac{2E}{\pi n} \sin(n\alpha\pi) = 0 \Rightarrow n\alpha\pi = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{k}{n}}$$

3. Commentaire de l'évolution des coefficient

$$a_n = 2E\alpha \times \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi}$$

quand $\alpha \longrightarrow 0$ $\quad \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} = \text{sinc}(n\alpha\pi) \longrightarrow 1$

D'où $\quad a_n = 2\alpha E$.

Donc au fur et à mesure que τ diminue, les coefficients des harmoniques tendent vers la même valeur $2\alpha E$, double de la valeur de la composante continue.

(10) **Exercice 6** : Spectre d'un signal modulé sinusoïdalement en amplitude $\left(m = \frac{Y_{max} - Y}{Y_{max} +} \right.$

$S_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ signal porteur

$S_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$: signal modulant $f_m \ll f_p$

$S(t) = A_p [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t)$

1. Détermination de m. Signal modulé

D'après le modulateur utilisé, on a $S(t) = S_p(t) + k\, S_p(t)$

$S = S_p(t)\left(1 + k\, S_m(t)\right) = A_p\left[1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)\right] \cos$

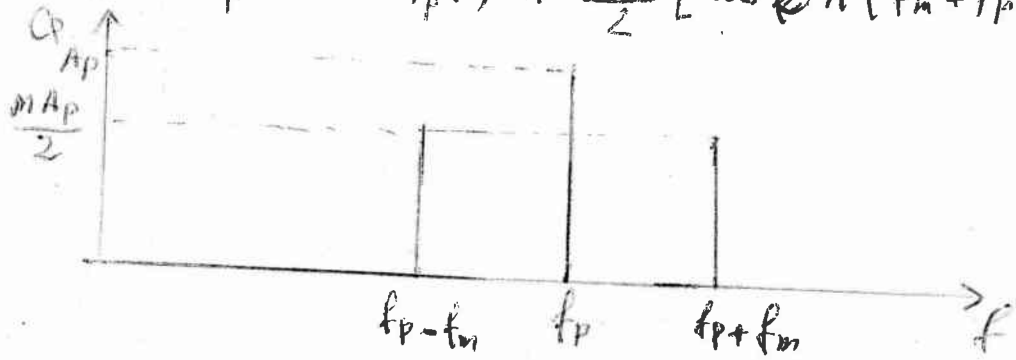
$S(t) = A_p \left[1 + k A_m \cos(2\pi f_m t) \right] \cos(2\pi f_p t)$

$\Rightarrow \quad m = k A_m$

2- Spectre de $S(t)$

$S(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + m A_p \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t$

$S(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{m A_p}{2} [\cos 2\pi (f_m + f_p) t + \cos 2\pi (f_p - f$



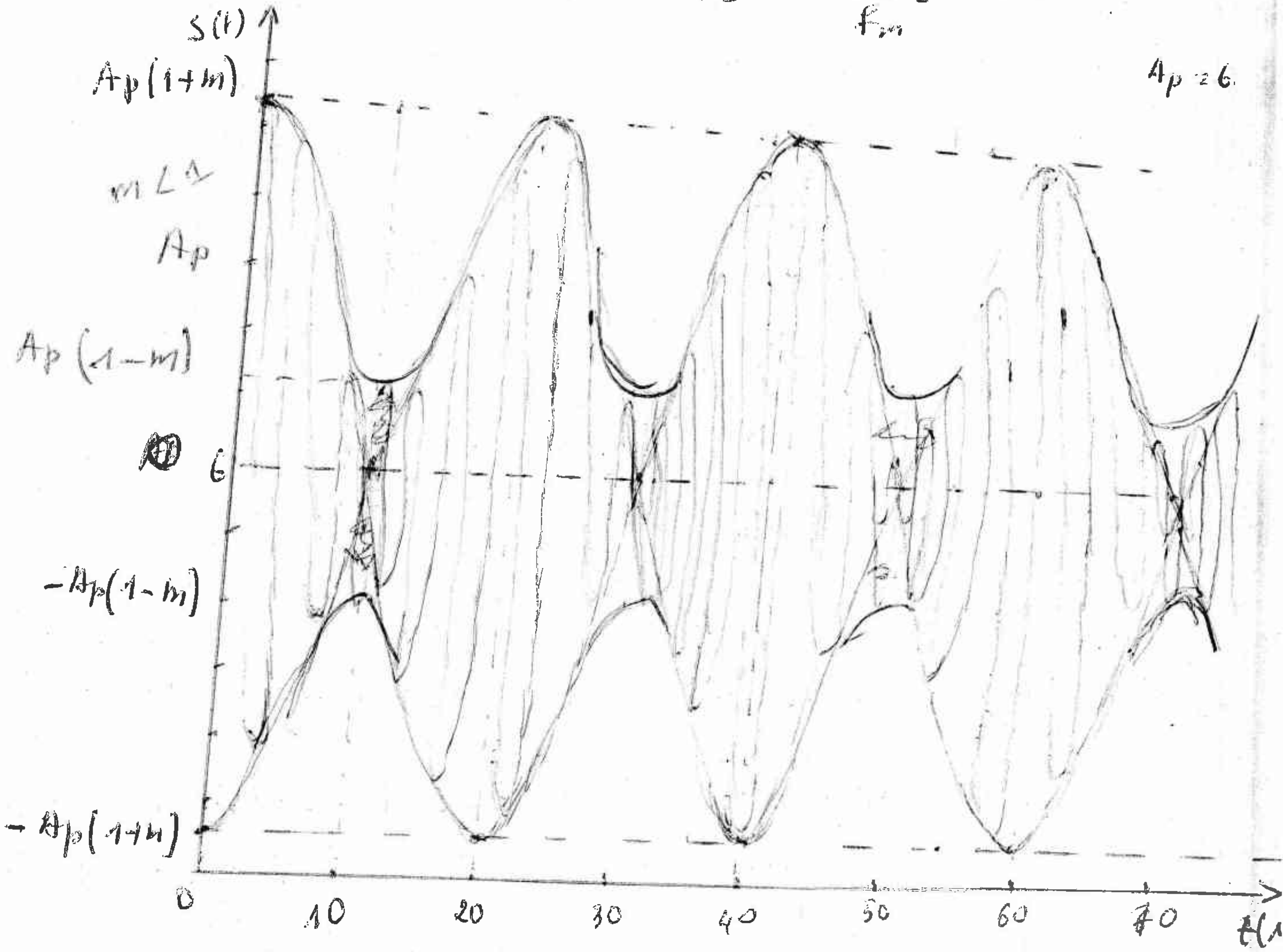
Le spectre comprend trois raies, la raie $[f_p, A_p]$ ~~associée~~ de la porteuse et deux raies $[f_p - f_m, \frac{m A_p}{2}]$, $[f_p + f_m, \frac{m}{2}$ créé par la modulation d'amplitude.

3- Allure du signal modulé pour un indice de modulation $m < 1$; par exemple $m = 0,9$

$f_p = 1\, MHz$; prenons par exemple $\frac{f_p}{f_m} = 40$

$f_m = 2,5\, 10^4\, Hz \quad T_m = \frac{1}{} = 40\, \mu$

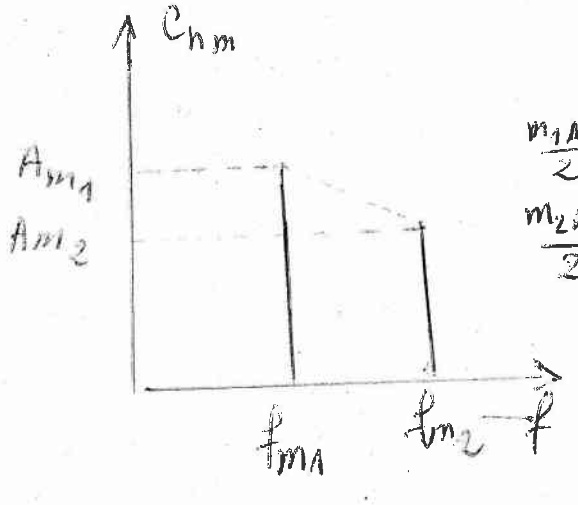
L'amplitude du signal $s(t)$, $A_p[1 + m \cos 2\pi f_m t]$ varie entre $A_p(1+m)$ et $A_p(1-m)$ au rythme du signal modulant $s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ avec un indice de modulation $m = 0,9$ et $\frac{f_p}{f_m} = 40$.

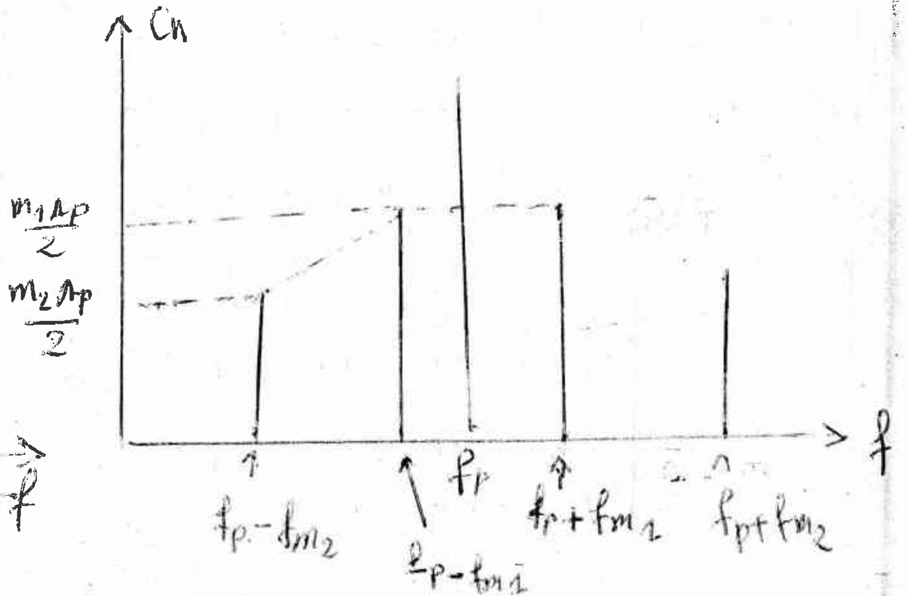


4- Bande passante nécessaire à la transmission

$$s(t) = A_p \cos 2\pi f_p t + \frac{m A_p}{2}\left[\cos 2\pi (f_p + f_m)t + \cos 2\pi (f_p - f_m)t\right]$$

Signal modulant





(11)

A chaque fréquence f_m du spectre audio sont associées trois raies dans le spectre du signal modulé dont les fréquences sont respectivement f_p, $f_p + f_m$ et $f_p - f_m$. Il en résulte que la bande de fréquence nécessaire à la transmission du signal s'étend de $f_p - f_{m_2} = 1 - 4{,}5\,10^{-3} = 0{,}9955$ MHz à $f_p + f_{m_2} = 1 + 4{,}5\,10^{-3} = 1{,}0045$ MHz

$BP = [0{,}9955 \,,\, 1{,}0045]$ MHz.

5- le signal délivré par le multiplicateur est

$$S'(t) = k'\, s(t)\, s'_p(t) =$$

$$s'(t) = k' A'_p A_p \left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\cos^2(2\pi f_p t)$$

$$= \frac{k' A'_p A_p}{2}\left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\left(1 + \cos(2\omega_p t)\right)$$

$$= \frac{k' A'_p A_p}{2}\left[\left(1 + m\cos(\omega_m t)\right) + \left(1 + m\cos(\omega_m t)\right)\cos 2\omega_p t\right]$$

$$= \frac{k' A'_p A_p}{2}\left[1 + m\cos(\omega_m t) + \cos 2\omega_p t + m\cos\omega_m t\cos 2\omega_p t\right]$$

$$s'(t) = \frac{k' A'_p A_p}{2}\left[\left(1 + m\cos(\omega_m t) + \cos 2\omega_p t\right) + \frac{m}{2}\cos(2\omega_p - \omega_m)t + \frac{m}{2}\cos(2\omega_p + \omega_m)t\right]$$

les fréquences $(2f_p \pm f_m)$ étant supérieures à f_p ($f_p \gg f_m$) on obtient par filtrage passe-bas le signal :

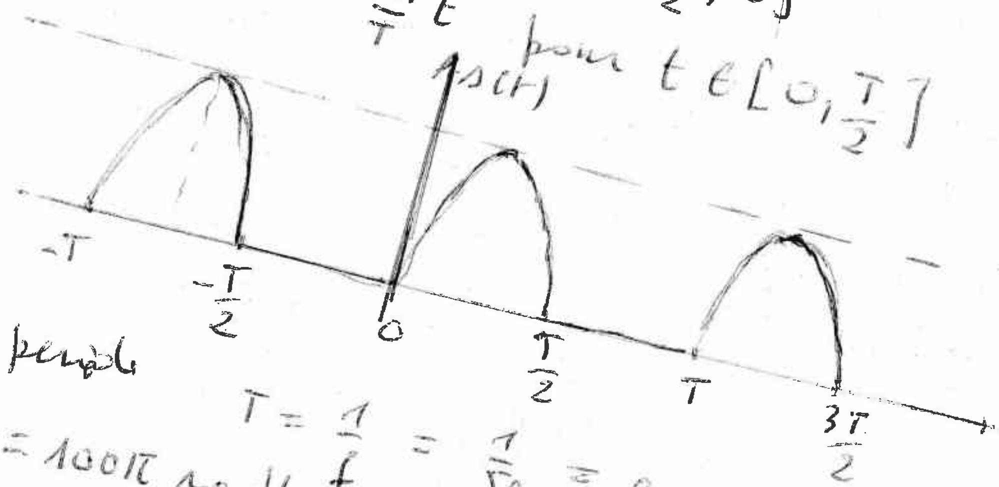
$$S''(t) = \frac{k' A_p A'_p}{2}\left(1 + m\cos(\omega_m t)\right)$$

Le signal $s''(t)$ est appliqué à l'entrée d'un amplificateur basse fréquence ($f < 30\,kHz$), *par l'intermédiaire d'un condensateur, ce qui élimine la composante continue et fournit le signal démodulé : $S_d(t) = \frac{k' m A_p A_p'}{2} \cos(\omega_m t)$.

La composante continue, obtenue par filtrage passe-bas de $s''(t)$, est proportionnelle à l'amplitude à l'amplitude du signal démodulé. Cette propriété est utilisée pour la commande d'un circuit contrôlant le gain de l'amplificateur basse fréquence. (Circuit de commande automatique du gain ou C.A.G.

... : Signal redressé monoalternance

1. $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ E \sin \frac{2\pi}{T} t & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases}$



2) la période

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\ s$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$\omega = 100\pi\ rad/s = 314{,}16\ rad/s$

3) ~~Déf~~ Développement en série de Fourier

$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega t)\, dt = -\frac{E}{\omega T} [\cos \omega t]_0^{T/2}$

$= \frac{E}{2\pi}(1 - \cos \pi) = \frac{E}{\pi}$

$n \geq 1$ $\quad \underline{C_n} = \frac{2E}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega t)\, e^{-jn\omega t}\, dt$

$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$\underline{C_n} = \frac{2E}{2Tj} \int_0^{T/2} \left(e^{j\omega t(1-n)} - e^{-j\omega t(n+1)} \right) dt$

$\underline{C_n} = \frac{2E}{2jT} \times \frac{1}{j\omega} \left[\frac{1}{1-n} e^{j\omega(1-n)t} + \frac{1}{n+1} e^{-j\omega t(n+1)} \right.$

$= -\frac{2E}{2T\omega} \left[\frac{1}{1-n} e^{j\pi(1-n)} + \frac{1}{n+1} e^{-j\pi(n+1)} \right.$ $\quad -\frac{1}{1-n} - \frac{1}{n+1}$

$n \neq 1$

$C_n = \frac{-\cancel{2}E}{2\pi} \left(\frac{1}{1-n} \cos(1-n)\pi + \frac{1}{n+1} \cos(n+1)\pi - \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{n+1} \right) \right)$

* pour n impair. $\Rightarrow n = 2p+1$

$$C_{2p+1} = \frac{-E}{2\pi}\left(\frac{-1}{2p} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+1)}\right)$$

$$C_{2p+1} = 0 \Rightarrow a_{2p+1} = b_{2p+1} = 0$$

* pour n pair, $n = 2p$

$1-n = 1-2p$ impair

$1+n = 1+2p$ impair

$$C_{2p} = \frac{-E}{2\pi}\left(\frac{-1}{1-2p} - \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{1-2p} - \frac{1}{2p+1}\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\left(\frac{1}{1-2p} + \frac{1}{2p+1}\right) = \frac{E}{\pi}\left(\frac{2p+1+1-2p}{1-4p^2}\right)$$

$$C_{2p} = \frac{2E}{\pi(1-4p^2)}$$

$$a_{2p} = \frac{2E}{\pi(1-4p^2)} \qquad b_{2p} = 0$$

* $n = 1$

$$C_1 = \frac{2E}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2E}{T}\int_0^{T/2} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$C_1 = \frac{E}{jT}\int \left(1 - e^{-2j\omega t}\right) dt = \frac{E}{jT}\left[t + \frac{1}{2j\omega} e^{-2j\omega t}\right]$$

$$= \frac{E}{jT}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2j\omega}\left(e^{-2\pi j} - 1\right)\right.$$

$$= \frac{E}{2j} = -\frac{jE}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \quad b_1 = \frac{E}{2}$$

* $$s(t) = E\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\omega t - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2p\omega t)}{4p^2-1}\right)$$

3 - Facteur de forme F et taux d'ondulation δ_0

Facteur de Forme

$$F = \frac{\sqrt{A_0^2 + }}{A_0} = \frac{X_{eff}}{\langle x(t) \rangle}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos$

$$\langle s(t) \rangle = \frac{E}{\pi}$$

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} E^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t \, dt$$

$$= \cancel{\frac{1}{T}} \frac{E}{T}^2 \int_0^{T/2} \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t\right) dt$$

$$= \frac{E^2}{2T}\left[t - \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{T} t\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{E^2}{2T}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E^2}{4}$$

$$s_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \frac{E}{2}$$

$$F = \frac{\frac{E}{2}}{\frac{E}{\pi}} = \frac{\pi}{2} = 1,57$$

* Taux d'ondulation

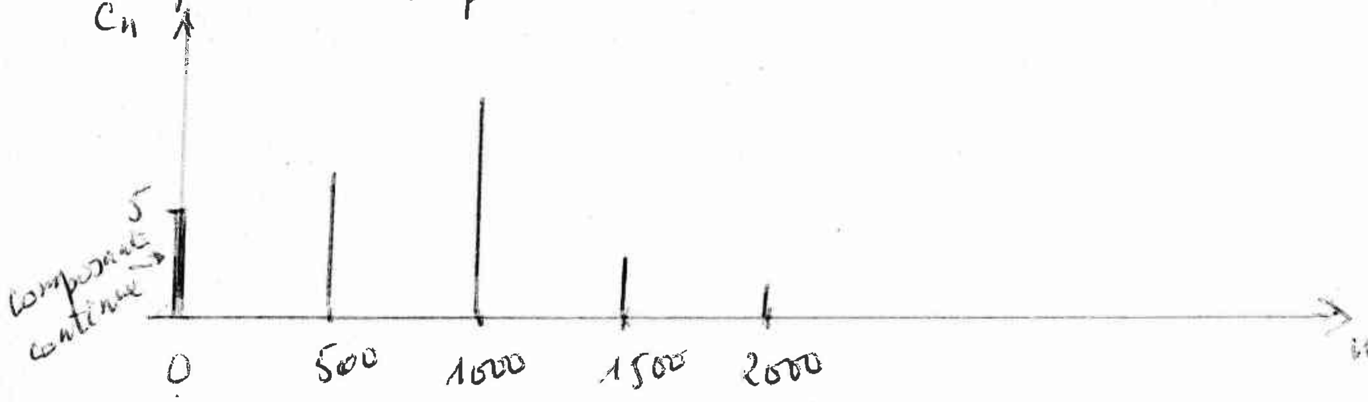
$$F^2 = 1 + \delta_0^2 \Rightarrow \delta_0 = \sqrt{F^2 - 1}$$

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} = 1,21$$

Exercice 8 :

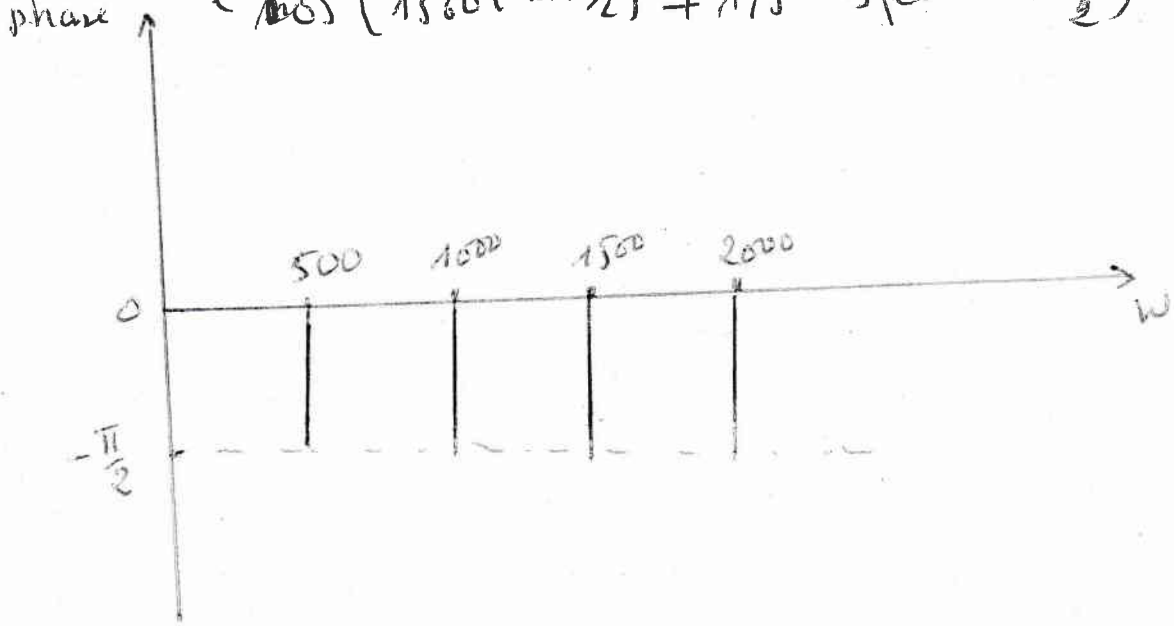
$$s(t) = 5 + 7 \sin 500t + 10 \sin(1000t) + 2 \sin(1500t) + 1{,}5 \sin 2000t$$

* Spectre d'amplitude



Spectre de phase

$$s(t) = 5 + 7 \cos\left(500t - \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cos\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(1500t - \pi/2\right) + 1{,}5 \cos\left(2000t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Exercice 9

(15)

Le système est dit linéaire s'il existe une equation differentielle à coefficient constant entre e(t) et s(t).

Autrement dit, si on soummet le spectre de e... au système linéaire, il est incapable de créer de nouvelles d'autres raies en sortie, sinon de supprimer des raies du signal d'entrée pour obtenir un spectre moins riche en sortie. la sortie

a) On appelle spectre de fréquence, la representation en fonction de la frequence, des amplitudes et eventuellement des phases des composantes sinusoïdales d'une grandeur physique fonction du temps.

b) le système 1 laisser passer les raies de faible frequences et attenu voir supprime les r... de frequences élevé : c'est un filtre linéaire

Nature ou rôle = filtre passe-bas.

c) le filtre 2 supprime les raies de ban... frequences et de hautes fréquences : C'est... un système linéaire.

Nature : filtre passe bande ... 500 Hz et 3,1 kHz

le filtre 3 créé de nouvelles raies

La formule de Parseval se démontre en remarquant que :

$$s^2(t) = \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)\right]^2$$

comprend :
- un terme constant C_0^2 de valeur moyenne C_0^2 ;
- des termes en $2C_0C_n\cos(n\omega t + \phi_n)$ et en :

$$2C_n\cos(n\omega t + \phi_n)C_m\cos(m\omega t + \phi_m) \quad (n \neq m)$$

de valeur moyenne nulle ;
- des termes en $C_n^2\cos^2(n\omega t + \phi_n)$ de valeur moyenne $\frac{1}{2}C_n^2$.

La formule de Parseval peut s'interpréter physiquement en constatant que l'énergie est souvent une fonction quadratique du signal (par exemple $\mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu^2$ dans un condensateur $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv^2$ pour un point matériel...). Elle signifie alors que l'énergie moyenne contenue dans le signal périodique est la somme des énergies moyennes associées à chacun de ses harmoniques.

Application 2

Puissance moyenne d'un courant redressé

1) *Calculer, en utilisant sa définition, la valeur efficace I d'un courant sinusoïdal redressé double alternance.*

Comparer au signal non redressé.

2) *Ce courant redressé est filtré par un filtre passe-bas parfait, de fréquence de coupure f_H. Un tel filtre a pour fonction de transfert :*

$$\underline{H}(j\omega) = 1 \text{ si } f < f_H \text{ et } \underline{H}(j\omega) = 0 \text{ si } f > f_H$$

Déterminer la valeur minimale de f_H pour que 99 % de la puissance moyenne $\mathscr{P}$ soit transmise.

Comparer au signal non redressé.

1) Par définition :

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t = \frac{i_m^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{i_m^2}{2},$$

d'où, comme pour le signal non redressé :

$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}}.$$

2) Nous avons vu l'expression de la décomposition en série de Fourier d'un courant redressé double alternance (*cf.* § **1.4.4.**) :

$$i(t) = \frac{2i_m}{\pi}\left[1 - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(2p\omega t)}{4p^2 - 1}\right].$$

Notons $Z = R + jX$ l'impédance d'utilisation. Elle aurait reçu avant filtrage la puissance :

$$\mathscr{P} = RI^2 = R\frac{i_m^2}{2}.$$

Après filtrage passe-bas, en ne conservant que les n premiers harmoniques, cette impédance ne reçoit plus que la puissance :

$$\mathscr{P}_n = R\frac{4i_m^2}{\pi^2}\left[1 + 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(4p^2-1)^2}\right]$$

d'après le théorème de Parseval.

Le rapport ρ_n de la puissance $\mathscr{P}_n$ transmise par le filtre à la puissance $\mathscr{P}$ disponible avant filtrage est :

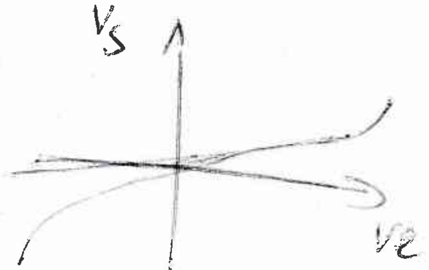
$$\rho_n = \frac{\mathscr{P}_n}{\mathscr{P}} = \frac{8}{\pi^2}\left[1 + 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(4p^2-1)^2}\right].$$

Calculons les trois premières valeurs de ρ_n :

$$\rho_0 = 0{,}8104, \quad \rho_1 = 0{,}9905 \quad \text{et} \quad \rho_2 = 0{,}9977.$$

Pour que 99 % de la puissance soit transmise par le filtre, il suffit que sa fréquence de coupure f_H soit supérieure à la fréquence du fondamental $f_1 = \frac{2\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\pi}$, c'est-à-dire au double de la fréquence du courant avant redressement. Pour le signal non redressé, on a 100 % de transmission de la puissance dès que $f_H > f_1$. Pour le signal redressé, ce n'est pas très différent.

Exercice 11 : Distorsion harmonique d'un amplificateur (17)



Caractéristique d'un amplificateur en régime harmonique de forts signaux.

A l'entrée de l'amplificateur, on a : $Ve(t) = V_{em} \cos \omega t$

le signal dérivé en sortie n'est pas sinusoïdal :

$$V_S(t) = a V_{em} \cos(\omega t) + b V_{em}^3 \cos^3(\omega t)$$

Linéarisation : $\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t)$

$$\cos^3(\omega t) = \cos^2(\omega t) \times \cos \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)\cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2}\cos \omega t + \frac{1}{2}\cos 2\omega t \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2}\cos \omega t + \frac{1}{4}(\cos 3\omega t + \cos \omega t)$$

$$= \frac{3}{4}\cos \omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

Il vient :

$$V_S(t) = \left[a V_{em} + \frac{3 b V_{em}^3}{4}\right]\cos(\omega t) + \frac{b V_{em}^3}{4}\cos 3\omega t$$

La décomposition en série de Fourier de la tension de sortie comprend deux termes, respectivement d'amplitude

$$C_1 = a V_{em} + \frac{3b}{4} V_{em}^3 \quad \text{et} \quad C_3 = \frac{b}{4} V_{em}^3$$

le taux de distorsion harmonique de l'amplificateur s'en déduit : $Sh = \frac{C_3}{C_1} = \frac{\frac{b}{4}V_{em}^3}{a V_{em} + \frac{3b}{4}V_{em}^3} = \frac{S_3}{S_1}$

$$Sh = \frac{b}{3b + \frac{4a}{V_{em}^2}}$$

le taux de distorsion harmonique est une fonction croissante de l'amplitude.

comme cela est généralement le cas, la distorsion harmonique de cet amplificateur se manifeste surtout en régime de forts signaux